ベータ関数と $\frac{1}{6}$ 公式について

問題 非負整数 m, n に対して $I(m, n) = \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^m (\beta-x)^n \, dx \ (\beta \geqq \alpha)$ とする．このとき

$$I(m, n) = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

が成り立つことを示せ．

考え方 部分積分により $I(m, n)$ の漸化式を導くことができないかを考える．

解答 $I(m, n)$ に対して部分積分を行うと

$$\begin{aligned} I(m, n) &= \left[\frac{(x-\alpha)^{m+1}}{m+1}(\beta-x)^n \right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{(x-\alpha)^{m+1}}{m+1}(-n)(\beta-x)^{n-1} \, dx \\ &= \frac{n}{m+1} I(m+1, n-1) \end{aligned}$$

が得られる．よって，この漸化式を繰り返し用いていくと

$$\begin{aligned} I(m, n) &= \frac{n}{m+1} I(m+1, n-1) \\ &= \frac{n}{m+1} \cdot \frac{n-1}{m+2} I(m+2, n-2) \\ &\quad \vdots \\ &= \frac{n(n-1)\cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n-1)(m+n)} I(m+n, 0) \\ &= \frac{m!n!}{(m+n)!} \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^{m+n} \, dx \\ &= \frac{m!n!}{(m+n)!} \left[\frac{(x-\alpha)^{m+n+1}}{m+n+1} \right]_{\alpha}^{\beta} \\ &= \frac{m!n!}{(m+n+1)!} (\beta-\alpha)^{m+n+1} \end{aligned}$$

となり，これで示すべき等式が示された．……(**答**)

参考

（１）$m = n = 1$ とすると，$\frac{1}{6}$ 公式

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) \, dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

が得られる．$\frac{1}{6}$ 公式は，他にも証明方法がある．

（２）$\alpha = 0, \beta = 1$ としたときの $I(m-1, n-1)$ を特に $B(m, n)$ で表し，これをベータ関数という．詳しくは大学以降で学習することになるが，ベータ関数は様々な分野でよく登場する重要な関数である．